Практикалық сабақ №4

Тақырыбы: Көп айнымалы функцияның экстремумы.

Мақсаты: Көп айнымалы функцияны экстремумге зерттеу.

Мысал 1. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешуі: z функциясының дербес туындыларын есептейік: $z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$, $z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$. Стационар нүктелер

$$4x^3 - 2x - 2y = 0,\ 4y^3 - 2x - 2y = 0$$

жүйесінен табылады.

Осы жүйенің үш шешімі бар: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$. Локальді экстремумның жеткілікті шарттын тексеру үшін екінші ретті дербес туындыларды есептейік $A = z''_{xx} = 12x^2 - 2$, $B = z''_{xy} = -2$, $C = z''_{yy} = 12y^2 - 2$, онда

$$\Delta(x, y) = AC - B^2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

$\Delta(0,0) = 0$ болғандықтан экстремум бар болатынын анықтау үшін $(0,0)$ нүктесіндегі z функциясының өсімшесін қарастырайық: $\Delta z(0,0) = z(h,k) - z(0,0)$. Егер $k = h$ болса, мұндағы $0 < h < \sqrt{2}$, онда $\Delta z(0,0) = 2h^2\left(h^2 - 2\right) < 0$. Егер де $k = -h$ болса, мұндағы $h > 0$, онда $\Delta z(0,0) = 2h^4 > 0$.

Сонымен, $\Delta z(0,0)$ өсімшесі әртүрлі таңбалы мәндерді қабылдайды, сондықтан $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ болғанда экстремум жоқ.

$(-1,-1)$ және $(1,1)$ нүктелерінде $\Delta = 96 > 0$, сонымен бірге $A = 10 > 0$ болғандықтан осы нүктелер функцияның минимум нүктелері және $z_{\min} = -2$.

Мысал 2. $z = x^2 + y^2 + 1$ функциясын экстремумға зерттейік.

Шешуі: Дербес туындыларын табайық:

$$z'_x = 2x,\ z'_y = 2y;\ 2x = 0,\ 2y = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0.$$

Демек $M_0(0,0)$ нүктесі күдікті нүкте. Енді екінші ретті дербес туындыларын тауып $M_0(0,0)$ нүктесіндегі мәнін есептейміз: $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$; $z''_{xy} = 0$.

Сонда $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$. Ендеше $M_0(0,0)$ нүктесі берілген функцияның минимум нүктесі болады және $z_{\min}(M_0) = 1$.

Мысал 3. $z = 6 - 4x - 3y$ функциясының байланыс теңдеуі $x^2 + y^2 = 1$ болатын шартты экстремумын табу керек.

Шешуі: $x^2+y^2-1=0$ теңдеуіне сәйкес шарты экстремумын табу үшін Лагранж функциясын құрамыз: $\Phi(x,y)=6-4x-3y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$.

Сонда $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=-4+2\lambda x,\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=-3+2\lambda y,\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=x^2+y^2-1.$

Демек, мына теңдіктер орындалуы керек: $\begin{cases}-4+2\lambda x=0,\\ -3+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$

Осыдан $\lambda_1=\dfrac{5}{2},\ x_1=\dfrac{4}{5},\ y_1=\dfrac{3}{5}$ және $\lambda_2=\dfrac{5}{2},\ x_2=\dfrac{4}{5},\ y_2=\dfrac{3}{5}$.

Ал $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=2\lambda,\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0,\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2\lambda$, сондықтан, егер $\lambda=\dfrac{5}{2},\ x=\dfrac{4}{5},\ y=\dfrac{3}{5}$ деп алсақ, $A=5,\ B=0,\ C=5$. Яғни, $AC-B^2=25>0$ және $A>0$. Демек, бұл нүктеде функцияның шартты минимумы бар болады.

Ал $\lambda=-\dfrac{5}{2},\ x=-\dfrac{4}{5},\ y=-\dfrac{3}{5}$ болса, онда $A=-5,\ B=0,\ C=-5$. Яғни, $AC-B^2=25>0$ және $A<0$. Ендеше бұл нүктеде функцияның шартты максимумы бар болады.

Сонымен $z_{max}=6+\dfrac{16}{5}+\dfrac{9}{5}=11,\quad z_{min}=6-\dfrac{16}{5}-\dfrac{9}{5}=1.$

Мысал 4. $z=x^2-y^2-4x$ функциясының мына $x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0$ аймақтағы ең кіші және ең үлкен мәндерін табу керек.

Шешуі: Күдікті нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases}z'_x=2x-4=0\\ z'_y=-2y=0\end{cases}$$

Осыдан $x=2,\ y=0$. Күдікті нүкте $M_0(2{,}0)$ және $z(M_0)=2^2-4\cdot 2=-4$. Шеңбер доғасының бойында $y^2=9-x^2$, сондықтан $z=x^2-4x-\left(9-x^2\right)=2x^2-4x-9$. Осы бір айнымалды функцияның $[0;3]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табамыз. $z'_x=4x-4$ болғандықтан $x_1=1$ күдікті нүкте. Бұл мәнге шеңбердің екі нүктесі сәйкес келеді. $M_1(1,-\sqrt{8}),\ M_2(1,\sqrt{8})$. $z(M_1)=z(M_2)=2\cdot 1^2-4\cdot 1-9=-11$. Кесіндінің шеткі нүктелеріне мына нүктелер сәйкес келеді: $M_3(0,-3),\ M_4(0,3),\ M_5(3,0)$, $z(M_3)=z(M_4)=2\cdot 0-4\cdot 0-9=-9,\ z(M_5)=2\cdot 3^2-4\cdot 3-9=-3$. Сол сияқты z функцияның $x=0$ шекарадағы өзгерісін қарастырамыз. Бұл жағдайда

$z=-y^2, -3 \le y \le 3,\ z'_y=-2y \Rightarrow y=0.$ Функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін келесі нүктелерде қабылдауы мүмкін: $M_3(0,-3),\ M_4(0,3),\ M_6(0,0)$. Бұл нүктелерде $z(M_3)=z(M_4)=-9,\quad z(M_6)=0$. Ендеше $\min z=\min\{z(M_i)\}=\min\{-4;-11;-9;-3;0\}=-11,$
$\max z=\max\{z(M_i)\}=\max\{-4;-11;-9;-3;0\}=0$.

Аудиториялық жұмысы: Көп айнымалы функцияны экстремумге зерттеу: [8] №№ 3621, 3628, 3642, 3651, 3675.

Үй жұмысы

№№ 3624, 3633, 3643, 3654, 3679.